3ème Tech : T3
Durée : 2heures
Date : le 05 / 03 / 2007
Coefficient : 3

# Devoir de Synthèse N°2
# Mathématiques

## Exercice N°1 : ( 8 pts)

**I –**

1) Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$z_1 = \frac{-2i}{1-i} \quad ; \quad z_2 = i^6 \quad \text{et} \quad z_3 = (2-i)(1+2i) + i\left(\overline{-1-4i}\right)$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z + 3i = 4 + 2iz$ ( Donner la solution sous forme algébrique)

**II –** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(O,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par *A*, *B* et *C* les points d'affixes respectives : $z_A = 1-i$, $z_B = -1$ et $z_C = 2i$.

1) *a* – Placer les points *A*, *B* et *C* dans $\mathcal{R}$.
   *b* – Calculer $AB$, $AC$ et $BC$. En déduire que *BAC* est un triangle rectangle et isocèle en *B*.

2) Soit *D* un point d'affixe $z_D = 2+i$
   *a* – Montrer que *ABCD* est un parallélogramme. En déduire que *ABCD* est un carré.
   *b* – Déterminer l'affixe du point *I* centre du carré *ABCD*.

3) Soient les ensembles suivantes :

$$E = \{M(z) \in P / \ |z-1+i| = |z-2i| \ \} \text{ et } F = \{M(z) \in P / \ |\bar{z}+2i| = 2 \ \}$$

   Déterminer et construire les ensembles *E* et *F*.

## Exercice N°2 : ( 12 pts)

**I –** Soit la fonction *f* définie sur IR $\setminus\{-2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x+2}$ ($\alpha$ et $\beta$ deux réels )

et $\zeta_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que, pour tout $x \in$ IR $\setminus\{-2\}$ on a : $f'(x) = \dfrac{x^2+4x+2\alpha-\beta}{(x+2)^2}$.

2) Déterminer les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ tel que :
   - $f$ admet un extremum en $-1$.
   - $\zeta_f$ passe par le point $E(-1;-1)$.

**II –** On prend dans la suite $\alpha = 1$ et $\beta = -1$ alors : $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x+2}$

1) Etudier les limites de *f* en $-\infty$, en $+\infty$ et en $-2$.
   En déduire que la courbe $\zeta_f$ admet une asymptote *D*.

2) $a$ – Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tel que : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$ , pour tout $x\in \mathrm{IR}\setminus\{-2\}$ .

$b$ – En déduire que la courbe $\zeta_f$ admet une asymptote oblique $\Delta$ dont on déterminera une équation cartésienne.

$c$ – Déterminer la position de $\zeta_f$ par rapport à $\Delta$.

3) Déterminer le point d'intersection des droites $D$ et $\Delta$.

4) Démontrer que le point $A(-2\,;-3)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\zeta_f$.

5) $a$ – Calculer $f\,'(x)$ pour tout $x\in \mathrm{IR}\setminus\{-2\}$ .

$b$ – Dresser le tableau de variation de $f$.

6) Compléter la courbe $\zeta_f$ et tracer les droites $D$ et Δ. ( annexe page 3).

7) Soit g une fonction sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par : $\begin{cases} g(x)=|f(x)| & \text{si } x>-2 \\ g(x)=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2} & \text{si } x<-2 \end{cases}$

$a$ – Montrer que pour $x<-2$ : $g(x)=f(x)+3$

$b$ – à partir de la courbe $\zeta_f$ tracer la courbe $\zeta_g$ représentative de g. Expliquer.

$c$ – En déduire le tableau de variation de $g$.

*Bon travail*

Annexe

Nom : …………………………….. Prénom : …………………………………………… N° :……